

## V Predavanje - zadaci

1. Prilikom mjerenja dužine pantljkikom, koso po terenu, dobijena je vrijednost  $D_{koso}=58,27$  m. Visinska razlika između krajnjih tačaka je  $\Delta H=2,11$  m. Sračunati horizontalnu dužinu primjenom tačne i primjenom približne formule.

Primjenom tačne formule, horizontalna dužina se dobija kao:

$$D_{hor} = \sqrt{D_{koso}^2 - \Delta H^2} = \sqrt{58,27^2 - 2,11^2}$$

$$D_{hor} = 58,23 \text{ m}$$

Rezultat se zaokruži na dvije decimale, kako je i data kosa dužina.

Napomena: U svim zadacima jedinice izvedene (sračunate) veličine treba zaokružiti na tačnost jedinice elemenata iz kojih su one sračunate.

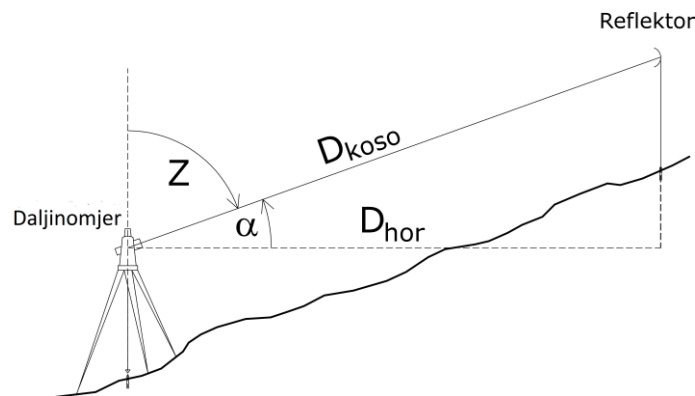
Primjenom približne formule, horizontalna dužina se dobije kao:

$$D_{hor} = D_{koso} - \frac{\Delta H^2}{2 * D_{koso}} - \frac{\Delta H^4}{8 * D_{koso}^3} = 58,23 - \frac{2,11^2}{2 * 58,27} - \frac{2,11^4}{8 * 58,27^3}$$

$$D_{hor} = 58,23 \text{ m}$$

Dobijeni rezultat je isti kao i primjenom tačne formule.

2. Elektromagnetnim daljinomjerom je na terenu izmjerena kosa dužina  $D_{koso}=151,22$  m i zenitno odstojanje  $Z = 87^\circ 23' 11''$ . Sračunati horizontalnu dužinu.



Bez obzira na vrijednosti mjerenih veličina  $Z$  ili  $\alpha$  iz slike gore se dobijaju formule za računanje horizontalnih dužina:

$$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z \quad \text{ili}$$

$$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$$

U ovom zadatku dato je zenitno odstojanje pa će tražena horizontalna dužina biti:

$$D_{hor} = D_{koso} * \sin Z = 151.22 m * \sin 87^{\circ}23'11''$$
$$D_{hor} = 151.06 m$$

3. Elektromagnetnim daljinomjerom je na terenu izmjerena kosa dužina  $D_{koso}=97.98 m$  i vertikalni ugao  $\alpha = -4^{\circ}07'59''$ . Sračunati horizontalnu dužinu.

Horizontalna dužina se računa po formuli:

$$D_{hor} = D_{koso} * \cos \alpha$$

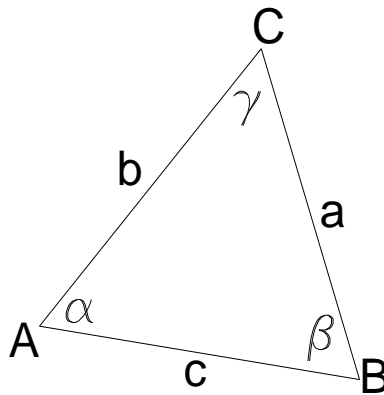
Pošto za vrijednost vertikalnog ugla imamo negativan broj, na njega će se dodati  $360^{\circ}$ .

$$\alpha = -4^{\circ}07'59''(+360^{\circ}) = 355^{\circ}52'01''$$

$$D_{hor} = 97.88 m * \cos 355^{\circ}52'01''$$

$$D_{hor} = 97.63 m$$

4. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:  
 $\alpha = 57^{\circ}28'39''$ ,  $\beta = 64^{\circ}04'57''$  i  $b=49.53m$ .



Vrijednost ugla  $\gamma$  se dobija iz uslova da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak  $180^{\circ}$ :

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 57^{\circ}28'39'' - 64^{\circ}04'57''$$

$$\gamma = 58^{\circ}26'24''$$

Za računanje nepoznatih stranica u ovom slučaju se može primijeniti sinusna teorema koja za ovako postavljene elemente trougla na slici glasi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

Iz date proporcije se može sračunati dužina  $a$  preko formule:

$$a = \frac{b * \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{49.53 m * \sin 57^{\circ}28'39''}{\sin 64^{\circ}04'57''}$$

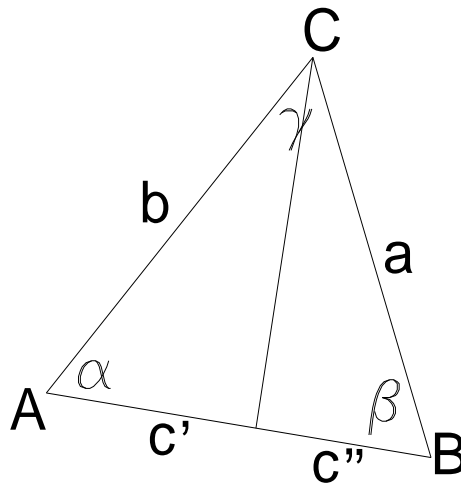
$$a = 46.43 m$$

I na kraju se sračuna dužina c preko:

$$c = \frac{a * \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{46.43 m * \sin 58^{\circ}26'24''}{\sin 57^{\circ}28'39''}$$

$$c = 46.92 m$$

Kontrola se vrši spuštanjem visine na stranicu c čime se stranica c dijeli na dva dijela  $c'$  i  $c''$ . Zbir ta dva dijela treba da bude jednak stranici  $c = c' + c''$ .

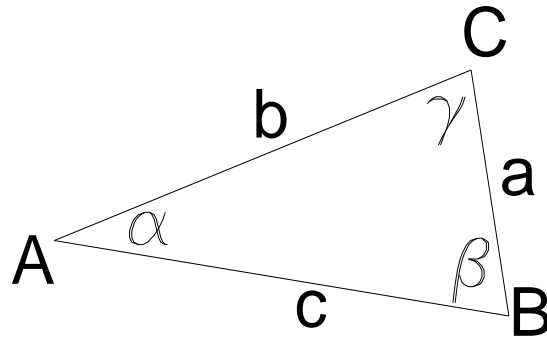


Sa slike se vidi da je  $c' = b * \cos \alpha$  i  $c'' = a * \cos \beta$ , pa se kontrola sračunatih elemenata trougla se može izvršiti preko formule:

$$c = b * \cos \alpha + a * \cos \beta = 49.53 * \cos 57^{\circ}28'39'' + 46.43 * \cos 64^{\circ}04'57''$$

$$c = 46.92 m$$

5. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:  
 $\beta = 80^{\circ}14'22''$ ,  $a=37.21\text{m}$  i  $b=62.29\text{m}$ .



Dati elementi predstavljaju situaciju kada su date dvije stranice i ugao naspram duže od njih. U ovom slučaju postoji samo jedno rješenje za vrijednosti preostalih elemenata i potrebno je za date elemente postaviti sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

Iz nje se može izraziti sinus ugla  $\alpha$  kao:

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b} \text{ odakle je:}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a * \sin \beta}{b} = \arcsin \frac{37.21 * \sin 80^{\circ}14'22''}{62.29}$$

$$\alpha = 36^{\circ}03'58''$$

Zatim se može sračunati vrijednost ugla  $\beta$  iz pravila da je zbir unutrašnjih uglova u trouglu  $180^{\circ}$ :

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 36^{\circ}03'58'' - 80^{\circ}14'22''$$

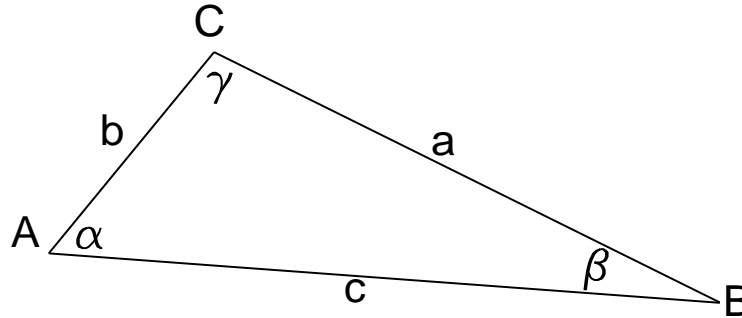
$$\beta = 63^{\circ}41'40''$$

I na kraju, stranica  $b$ :

$$b = \frac{a * \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{37.21 * \sin 63^{\circ}41'40''}{\sin 36^{\circ}03'58''}$$

$$b = 56.66 \text{ m}$$

6. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:  
 $\beta = 22^\circ 55' 41''$ ,  $a = 70.87$  m i  $b = 32.02$  m.



Dati elementi predstavljaju situaciju kada su date dvije stranice i ugao naspram kraće od njih. Da bi provjerili da li je ovaj trougao moguće riješiti za date elemente je potrebno postaviti sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

i iz nje izraziti ugao preko datih elemeta. U ovom slučaju je to ugao  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b}$$

Ovaj trougao ima rješenje samo ukoliko je ispunjen uslov:

$a * \sin \beta < b$  što je u ovom slučaju tačno:

$$70.87 * \sin 22^\circ 55' 41'' < 32.02$$

U ovom slučaju postoje dva rješenja:

Jedno u kome je ugao  $\alpha$  oštar ugao (manji od  $90^\circ$ ) i dobija se direktno iz sinusne teoreme i drugo u kome je on tup (veći od  $90^\circ$ ) i čini njegovu dopunu do  $180^\circ$ . Obzirom da se sa slike vidi da je ugao  $\alpha$  oštar usvojiće se prva varijanta.

Iz sinusne teoreme se dobija:

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b} \text{ odakle je:}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a * \sin \beta}{b} = \arcsin \frac{70.87 * \sin 22^\circ 55' 41''}{32.02}$$

$$\alpha = 59^\circ 34' 12''$$

Treći ugao se dobija kao:

$$\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha = 180^\circ - 22^\circ 55' 41'' - 59^\circ 34' 12''$$

$$\gamma = 97^\circ 30' 07''$$

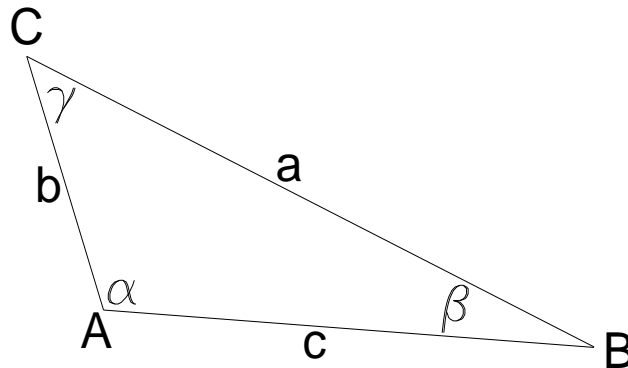
Na kraju, iz sinusne teoreme dobija se vrijednost stranice  $c$ :

$$c = \frac{b * \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{32.02 * \sin 97^\circ 30' 07''}{\sin 22^\circ 55' 41''}$$

$$c = 81.49 \text{ m}$$

7. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:

$$\beta = 23^{\circ}15'21'', a=67.87 \text{ m i } b=29.06 \text{ m.}$$



Dati elementi predstavljaju situaciju kada su date dvije stranice i ugao naspram kraće od njih. Da bi provjerili da li je ovaj trougao moguće riješiti za date elemente je potrebno postaviti sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$$

i iz nje izraziti ugao preko datih elemeta. U ovom slučaju je to ugao  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b}$$

Ovaj trougao ima rješenje samo ukoliko je ispunjen uslov:

$$a * \sin \beta < b \text{ što je u ovom slučaju tačno:}$$

$$67.87 * \sin 23^{\circ}15'21'' < 29.06$$

U ovom slučaju postoje dva rješenja:

Jedno u kome je ugao  $\alpha$  oštar ugao (manji od  $90^{\circ}$ ) i dobija se direktno iz sinusne teoreme i drugo u kome je on tup (veći od  $90^{\circ}$ ) i čini njegovu dopunu do  $180^{\circ}$ .

Obzirom da se sa slike vidi da je ugao  $\alpha$  tup usvojiće se druga varijanta gdje je  $\alpha' = 180^{\circ} - \alpha$  ugao koji se traži u trouglu.

Iz sinusne teoreme se prvo sračuna vrijednost ugla  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{a * \sin \beta}{b} \text{ odakle je}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a * \sin \beta}{b} = \arcsin \frac{67.87 * \sin 23^{\circ}15'21''}{29.06}$$

$$\alpha = 67^{\circ}14'32''$$

Pa se pravi ugao  $\alpha'$  dobija:

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 67^\circ 14' 32'' = 112^\circ 45' 28''$$

Treći ugao se dobija kao:

$$\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha' = 180^\circ - 23^\circ 15' 21'' - 67^\circ 14' 32''$$

$$\gamma = 89^\circ 30' 07''$$

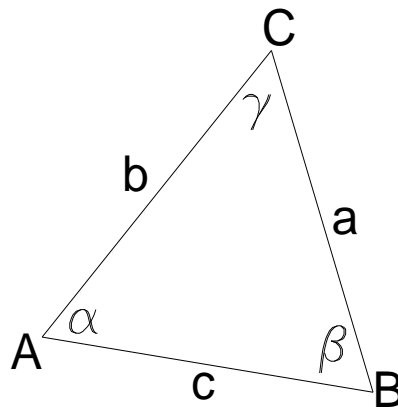
Na kraju, iz sinusne teoreme, dobija se vrijednost stranice  $c$ :

$$c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{29.06 \cdot \sin 89^\circ 30' 07''}{\sin 23^\circ 15' 21''}$$

$$c = 73.60 \text{ m}$$

8. Za trougao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:

$$\gamma = 23^\circ 15' 21'', a = 58.81 \text{ m i } b = 56.32 \text{ m.}$$



U ovom slučaju nije moguće riješiti trougao preko sinusne teoreme već je to moguće preko tangensne teoreme, kosinusne teoreme ili diobom trougla na dva pravougla trougla. Ovdje će biti obrađeno rješenje trougla preko kosinusne teoreme.

Kosinusna teorema za ovako postavljene elemente glasi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Odnosno:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{58.81^2 + 56.32^2 - 2 * 58.81 * 56.32 * \cos 23^\circ 15' 21''}$$

$$c = 23.33 \text{ m}$$

Zatim se možemo vratiti na sinusnu teoremu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \text{ odakle se može sračunati ugao } \beta:$$

$$\sin \beta = \frac{b * \sin \gamma}{c} \text{ odnosno}$$

$$\beta = \arcsin \frac{b * \sin \gamma}{c} = \arcsin \frac{56.32 * \sin 23^{\circ}15'21''}{23.33}$$

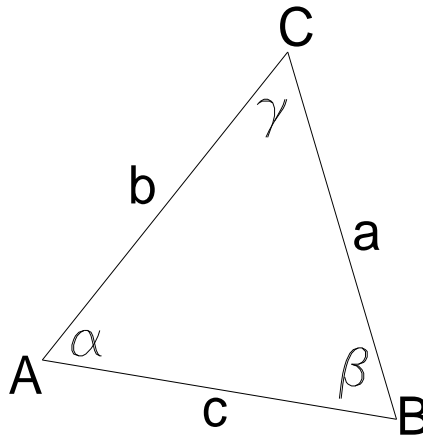
$$\beta = 72^{\circ}23'40''$$

I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\alpha = 180^{\circ} - \gamma - \beta = 180^{\circ} - 23^{\circ}15'21'' - 72^{\circ}23'40''$$

$$\alpha = 84^{\circ}20'59''$$

9. Za trogao na slici sračunati preostale elemente ako su dati podaci:  
a=49.47 m, b=43.89 m i c=50.51 m.



Iz jednog od oblika kosinusne teoreme:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  može se izraziti vrijednost kosinusa ugla  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ odakle je:}$$

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \arccos \frac{43.89^2 + 50.51^2 - 49.47^2}{2 * 43.89 * 50.51}$$

$$\alpha = 62^{\circ}44'49''$$



Za računanje preostala dva ugla u trouglu vrtićemo se sinusnoj teoremi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m \text{ odakle je:}$$

$$\sin \beta = \frac{b * \sin \alpha}{a} \text{ odnosno:}$$

$$\beta = \arcsin \frac{b * \sin \alpha}{a} = \arcsin \frac{43.89 * \sin 62^{\circ}44'49''}{49.47}$$

$$\beta = 52^{\circ}03'57''$$

I na kraju, poslednji ugao dobijamo preko:

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 62^{\circ}44'49'' - 52^{\circ}03'57''$$

$$\gamma = 65^{\circ}11'14''$$